【最優秀賞】

ポーカー型対戦ゲームの数学的理論と設計

霜田 晃希
岐阜大学工学部 3 年

要旨

本研究は通常のポーカーの大局を踏襲しつつも「役そのものではなく役に対応する得点の合計を競うゲーム」として新たに考案されたゲームを対象とする．本研究の目的はゲーム中の種々の確率が何に依存するかを明らかにし，役に対してどのように得点を設定すれば所望のゲーム性が得られるかを期待値の面から検討することである．

本論文では主に通常の 52 枚組トランプを単純化した 20 枚組トランプで検討を行い，確率が変化する要因を明らかにしたうえで実際に期待値の挙動を検討できる直前にまで至った．

キーワード：ポーカー，確率論，条件付き確率，期待値

１．緒言

ポーカーは手札に成立した役や使用した数字，スート（絵柄マーク）によって勝敗を決定する，世界で最も知られたトランプゲームのひとつである．本研究ではこのようなポーカーの大局を踏襲しつつも「役そのものではなく役に対応する得点の合計を競うゲーム」として新たに 2 者による対戦ゲームを定義し，これを対象とする．研究はまずゲーム中の種々の役の確率が何に依存してどのように振舞うかを明らかにし，次に役に対する得点設定が期待値の挙動に与える影響を観察することで進行する．所望のゲーム性（2 者の期待値の大小関係）を得る得点設定を導くことが最終的な目標である．

２．数学的準備

本章では以降の議論において必要となる数学的知識について整理しておく．

２．１　確率

確率（probability）とは事象の起こりやすさの度合いを定量的に評価するものである[1]．ここで事象（event）とは，試行（実験や観測など）の結果として起こる事柄のことを指す．

確率を定義する前にまず確率変数（random variable）という概念を導入しておく．確率変数は試行の結果により値が決まる変数である．例えば「サイコロを振る」という試行において確率変数 X を出た目の数を表すと決めれば，X の実現値は試行の結果により 1,2,3,4,5,6 のいずれかと

なる．これを $X = \{1,2,3,4,5,6\}$ と表記する．また X の実現値を x と書けば，確率変数 X がある実現値 x をとるという事象は $X = x$ と書ける．

X のうちのある事象が起こる確率 $P_{(X)}$ は確率変数を用いて（1）式に定義される．ただし $n_{(\Omega)}$ は試行の結果起こる全ての事象の数（全事象）であり， $n_{(X)}$ は X の場合の数である．

$$P_{(X)} = \frac{n_{(X)}}{n_{(\Omega)}} \tag{1}$$

（1）式は X の取りうる全ての x について記述した一般的表現である．「確率変数 X がある値 x をとる確率」のように具体的な確率を記述するときには $P_{(X=x)} = n_{(X=x)}/n_{(\Omega)}$ と書けばよい．なお本論文では略記法として $P_{(x)} = n_{(x)}/n_{(\Omega)}$ と書くことがある．この記法は以降の確率変数を引数とする関数において同様である．

２．２　条件付き確率

事象 B が起こったという条件のもとで事象 A が起こる確率，あるいは確率変数 B が明らかになったという条件のもとでの確率変数 A に関する確率を条件付き確率（conditional probability）といい[1]， $P_{(A|B)}$ と表記する．条件付き確率は（2）式に定義される．

$$P_{(A|B)} = \frac{P_{(A\cap B)}}{P_{(B)}} \tag{2}$$

ここで $P_{(A\cap B)}$ は事象 A, B の積事象 $A \cap B$ の確率であり，結合確率（joint probability）と呼ばれる．結合確率は A, B がともに起こるという事象の確率を示す．

２．３　組み合わせ

n 個ある集団から r 個を取り出して１組とするとき, 取り出した r 個により成立する組の総数を与えるのが組み合わせ（combination）である[2]．組み合わせは取り出した順番を考慮せず, 取り出したものが何であったかのみを問題とする点で順列と異なる． n 個から r 個を取り出す組み合わせ ${}_n\mathrm{C}_r$ は（3）式より計算できる．

$$ {}_n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} \tag{3}$$

２．４　期待値

ある試行の結果 X の具体的な値としてある値 x_k が得られ，その値が得られる確率が p_k であるとき，１回の試行で得られる値の期待値（expected value）は（4）式に定義される[1]．

$$E_{(X)} = \sum_k x_k p_k \tag{4}$$

期待値は値 x_k の発生確率が等しくないときにまで平均の概念を拡張したものと解釈することもできる．

２．５　積の法則

事象 A, B が存在して, それぞれの場合の数が $n_{(A)} = s,\ n_{(B)} = t$ であったとする．ここで A の s 通りのそれぞれに対して B の起こり方が t 通りあるとき， A, B がともに（同時に）起こる

場合の数 $n_{(A\cap B)}$ は st となる．これを積の法則（rule of product）と呼ぶ[2].

３．ゲーム設定と解析目標

３．１　ゲームの概要

３．１．１　用意するカード

山札として使用するトランプは日本で一般的に普及している，スペード（♤），クラブ（♧），ダイヤ（♢），ハート（♡）の 4 スートごとに A,2,3,…,10,J,Q,K の 13 種の数字が用意された 52 枚組トランプである．ただしワイルドカード（ジョーカー）は使用しない．

３．１．２　ゲーム進行

本ゲームのプレイヤーは 2 人とする．プレイヤーA,B は以下の「サイクル」を複数回実行し，全サイクルの得点の合計により勝敗を決定する．なお以降では下記の手順①-④を試行①-④と書く．

[ゲーム進行の手順（1 サイクル）]
①プレイヤーA は山札から手札として 5 枚取得
②プレイヤーB は山札から手札として 5 枚取得
③プレイヤーA は手札を破棄して山札から 5 枚取得してもよい
④プレイヤーB は手札を破棄して山札から 5 枚取得してもよい
⑤手札に成立した「役」によって得点が決定

手順中の「破棄」とは山札に手札を戻さずに「破棄札」として別に置いておくことを指す．また各サイクルを独立な試行とするため 1 サイクルが終了するごとに両プレイヤーの手札および破棄札を山札に戻して山札をよく切ることとする．

ここで，各サイクルは独立でも 1 サイクルのうち試行②-④はそれ以前の試行の結果に依存する点は特に重要である．Fig.1 に 1 サイクルの進行の様子を図示する．

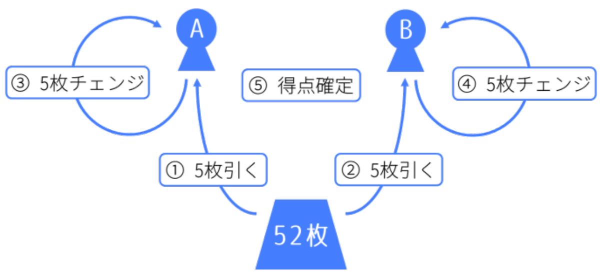

Fig.1 1 サイクルの手順

３．１．３　ポーカーの役

ポーカーでは手札に得られたカードの数字とスートによって 10 種類の役が定義されており[3][4]，本ゲームでもこれを採用する．以下に定義されている役を成立確率の低い順に示す（具体的な成立確率については 4.1 節および 5 章を参照）．なお以降では丸括弧内に示した略称で役を表記する．

[使用する役]

・**ロイヤルストレートフラッシュ**（RSF）

数字が A-K-Q-J-10 の 5 種からなる SF

・**ストレートフラッシュ**（SF）

ストレートかつフラッシュ

・**フォーカード**（4C）

同一の数字 4 枚が手札に存在

・**フルハウス**（FH）

ある同一の数字 3 枚と別の同一の数字 2 枚が手札に存在

・**フラッシュ**（F）

手札全てが同一のスートで構成

・**ストレート**（S）

手札が連続した数字の 5 枚で構成. A と K は A-K-Q-J-10 の組に限って連続するとみなされる

・**スリーカード**（3C）

同一の数字 3 枚が手札に存在

・**ツーペア**（2P）

ある同一の数字 2 枚と別の同一の数字 2 枚が手札に存在

・**ワンペア**（1P）

同一の数字 2 枚が手札に存在

・**ハイカード**（HC）

上記 9 種類に当てはまらないもの（役無し）

複数の役の定義と合致する手札は最も成立確率が低い役が成立したとみなす．例えば"♤5-♧5-♡5-◊2-♡2"という手札は FH,3C,2P,1P の定義を満たすが，FH として認識する．またポーカーではプレイヤーA,B の役が同一であれば手札に存在する数字やスートから必ず勝敗を決定するが，本ゲームでは数字やスートによる優劣は定めず引き分けを許容する．

本論文ではこのゲームに関する確率変数を H と書くことにし， H は実現値 h として成立した役をとると定める．すなわち H を（5）式に定める離散型確率変数と定義する．

$$H = \{\text{RSF, SF, 4C, FH, F, S, 3C, 2P, 1P, HC}\} \tag{5}$$

（本来は確率変数がとる値は実数である必要があるが，ここでは分かりやすさのために確率変数の拡張の一形態として「成立した役そのもの」をとることにする）

(5) 式を用いれば H のうちのいずれかが成立するときの確率は $P_{(H)}$ と書ける. ここで，$P_{(H)}$ は役に対応した確率を返す関数であるとも考えることができる．この立場から $P_{(H)}$ を扱うとき，$P_{(H)}$ を H の確率関数（probability function）と呼ぶ[5]． H が離散型であるため $P_{(H)}$ も離散型確率関数である．与えられた引数に対して $P_{(H)}$ が返すべき値は H の成立する確率であるが，この具体的な値は 4,5 章で考察する．

３．１．４　役と得点の関係

本ゲームは得点を競うゲームであるから役に対応した得点を定義する必要がある．ここでは $H = h$ のそれぞれに対して得点を返す関数として得点関数を新たに定義し，$S_{(H)}$ で表す．$S_{(H)}$ は離散型関数かつ全ての H に対して負値とならない実関数である．$S_{(H)}$ が引数に対して返すべき値は本項と 4.3 節で考察する．

得点はより成立しにくい役により高い得点を設定すべきであるとの立場から定める．すなわち $S_{(H)}$ は（6）式の関係を満たす．

$$S_{(\mathrm{RSF})} \geq S_{(\mathrm{SF})} \geq S_{(\mathrm{4C})} \geq S_{(\mathrm{FH})} \geq S_{(\mathrm{F})} \geq S_{(\mathrm{S})} \geq S_{(\mathrm{3C})} \geq S_{(\mathrm{2P})} \geq S_{(\mathrm{1P})} \geq S_{(\mathrm{HC})} \tag{6}$$

ここで確率関数，得点関数の形によるゲーム性について考える．確率関数は Fig.2 （a）に示すように単調減少関数となる．また（6）式の条件より得点関数は Fig.2 （b）のような単調増加関数である（同図は得点関数が準正定で 0 をとりうることと等号のために滞留する可能性があることを明示している）．ここで，これまでに定義した確率関数 $P_{(H)}$ および得点関数 $S_{(H)}$ により特定の役に限定した期待値を与える期待値関数 $\hat{E}_{(H)}$ を（7）式に定義する．

$$\hat{E}_{(H=h)} = S_{(H=h)} P_{(H=h)} \tag{7}$$

このとき，本ゲームの期待値 $E_{(H)}$ は（4）式を参考に（8）式から計算できる．

$$E_{(H)} = \sum_{h} \hat{E}_{(H=h)} \tag{8}$$

ここで，$S_{(h)} = 0$ となる $H = h$ の範囲では明らかに $\hat{E}_{(H)} = 0$ であるが，これ以外の $S_{(h)} > 0$ となる範囲で $E_{(h)}$ が単調増加であるか，単調減少であるか，またはどちらでもないかは確率関数と得点関数に依存し，明らかではない．しかしゲーム性の観点からは $\hat{E}_{(h)}$ は $S_{(h)} > 0$ となる h の範囲において Fig.2 （c）のように単調減少であるべきである．この理由は単純で，例えば成立確率の最も低い RSF にあまりにも高い得点を設定してしまうと対戦相手も RSF を揃えない限り勝てなくなってしまうためである．換言すれば，成立確率の低い高得点役の 1 回の成立に対して，成立確率の低くない中～小得点役の複数回の成立で太刀打ちできるようなゲーム設計とするためである．

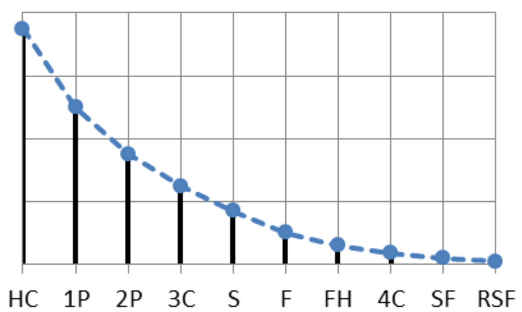

Fig.2 （a）　確率関数 $P_{(H)}$ の概形

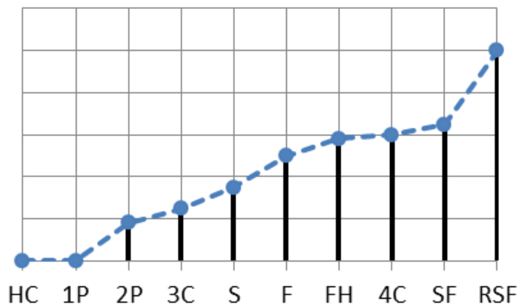

Fig.2　(b)　得点関数 $S_{(H)}$ の概形

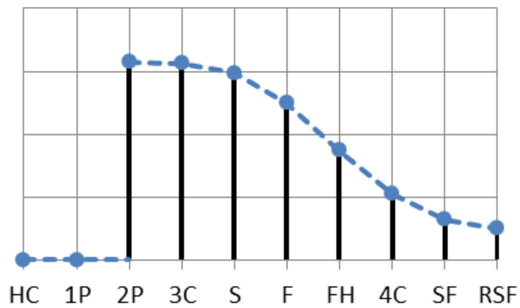

Fig.2　(c)　期待値関数 $\hat{E}_{(H)}$ の概形

３．２　目標

本ゲームにおいて検討すべき事項を挙げる.

[検討すべき事項]

・試行①の確率を求める

・条件付き確率である試行②-④の確率がそれ以前の結果のどのような要素に依存するかを明らかにする

・確率の依存性を考慮して試行②-④の確率を求める

・得られた確率を用いて，得点設定による期待値の変化を観察する

・所望のゲーム性（特に $\hat{E}_{(h)}$ の挙動）を満足する得点設定を決定する

３．３　問題の単純化

本研究では最終的に 52 枚組トランプによるゲームを設計することを想定しているが，本論文では問題の大局を把握することを目的に 20 枚組トランプによるゲームに単純化しての検討を主とする．具体的にはスペード，クラブ，ダイヤ，ハートの 4 スートごとに 10,J,Q,K,A の 5 種の数字を用意した 20 枚とする.

20 枚組トランプに単純化するとき，3.1.3 項で示す役のうち以下の 3 種類の役は成立しなくなり，確率変数 H も（9）式のようになる.

$$H = \{\mathrm{RSF},\ \mathrm{4C},\ \mathrm{FH},\ \mathrm{S},\ \mathrm{3C},\ \mathrm{2P},\ \mathrm{1P}\} \qquad (9)$$

[20 枚ゲームで成立しない役]

・ストレートフラッシュ（SF）

数字が 10,J,Q,K,A の 5 種類しかないことより SF は必ず RSF となる．

・フラッシュ（F）

各スートには連続した数字の 5 種類のみが存在することより同一スートの 5 枚を集めれば必ず SF となる．

・ハイカード（HC）

20 枚から手札として 5 枚選ぶとき，全て異なる数字ならば必ず S か RSF になる．また同一の数字が 2 つ以上存在すれば必ず 1P 以上の役となる．

４．20 枚ゲームの解析

現在までに試行①，②における種々の確率を求め，20 枚ゲームにおける得点設定の具体的な議論ができる直前にまで到達した．ただし時間的制約から試行③，④については解析に至っておらず，したがって期待値の議論は試行①，②のみにより行う．

４．１　試行①における確率

20 枚ゲームにおける試行①の確率を計算して求めた．この結果を Table1 に示す．

Table1 試行①における $n_{(h)}$ と $P_{(h)}$

h	n(h)	P(h) [%]
RSF	4	0.0258
4C	80	0.5160
FH	480	3.0960
S	1020	6.5789
3C	1920	12.3839
2P	4320	27.8638
1P	7680	49.5356
sum	15504	100.0000

Table1 の値の算出方法についていくつか例を挙げながら述べておく．まず確率を与えるのは (1) 式より（10）式となる．

$$P_{(H)} = \frac{n_{(H)}}{n_{(\Omega)}} \tag{10}$$

全事象 $n_{(\Omega)}$ は 20 枚から 5 枚引くときの組み合わせであり，(3) 式より ${}_{20}\mathrm{C}_5 = 15504$ となる．

次に分子の $n_{(h)}$ を求める．ここでは RSF,S, 2P について $n_{(\mathrm{RSF})}$ ，$n_{(\mathrm{S})}$ ，$n_{(\mathrm{2P})}$ の導出方法を例示する．導出は基本的に（i）役を要素ごとに分解し，（ii）各要素について数字を選び，（iii）選んだ数字の中でさらにスートを選ぶ，という手順で行った．

[試行①における $n_{(h)}$ の導出]

・RSF

同一のスートで A-K-Q-J-10 が揃う場合の数はスートの数と同じ 4 のみである．よって $n_{(\mathrm{RSF})} = 4$ ．

・S

20 枚組で S を揃えるときには数字の選び方について議論する必要はない．数字それぞれに対して 4 スートから 1 つ選ぶ（ ${}_4\mathrm{C}_1$ ）必要があり，数字は 5 種あるためこの値を 5 つかけ合わせる必要があるから $({}_4\mathrm{C}_1)^5$ が得られる．ここで，各数字に対して選んだスートが全て一致すると上位役の RSF となるため $n_{(\mathrm{RSF})}$ だけ除く必要がある．よって $n_{(\mathrm{S})} = ({}_4\mathrm{C}_1)^5 - n_{(\mathrm{RSF})} = 1020$ ．

・2P

2P を 1P 部 2 つと HC 部に分けて考える．まず 2 つの 1P 部の数字を 5 種の数字から 2 種選ぶ（ ${}_5\mathrm{C}_2$ ）．また選んだ数字の 1 種について 4 スートから 2 スートを選ぶ（ ${}_4\mathrm{C}_2$ ）．選んだ数字のもう 1 種についても同様に 2 スートを選ぶ（ ${}_4\mathrm{C}_2$ ）．HC 部についてはまず残っている数字 3 種から 1 種選び（ ${}_3\mathrm{C}_1$ ），さらに 4 スートから 1 スート選ぶ（ ${}_4\mathrm{C}_1$ ）．以上 5 つの組み合わせを積の法則により $n_{(2\mathrm{P})} = {}_5\mathrm{C}_2 \cdot {}_4\mathrm{C}_2 \cdot {}_4\mathrm{C}_2 \cdot {}_3\mathrm{C}_1 \cdot {}_4\mathrm{C}_1 = 4320$ と計算する．

４．１　試行②における依存性と確率

3.1.2 項で指摘したとおり試行②は試行①の結果に依存するから条件付き確率である．まずは条件付き確率の求め方について述べる．

（2）式に示した条件付き確率を変形する．このうち分母の $P_{(B)}$ は（10）式と等しいとすぐに分かる．分子の結合確率 $P_{(A\cap B)}$ は試行①,②に関する結合確率であるが，これを（1）式にのっとって考えると，結合確率の分母となるのは試行①における手札の全組み合わせ $n_{(\Omega)}$ と試行②における手札の全組み合わせの積（積の法則を利用）である．よって後者を $n_{(\Omega')}$ と書けば $n_{(\Omega)}n_{(\Omega')}$ となる．また結合確率の分子となるのは積の法則より，試行①にてある役 H が成立する数 $n_{(H)}$ と試行②にてある役 H' が成立する数の積である．よって後者を $n_{(H'|H)}$ と書けば $n_{(H)}n_{(H'|H)}$ となる．以上より，試行①で H が成立したという条件のもとでの試行②で H' が成立する確率は（11）式となる．式中の $n_{(\Omega')}$ は 15 枚から 5 枚引くときの組み合わせであり，(3) 式より ${}_{15}\mathrm{C}_5 = 3003$ である．

$$P_{(H'|H)} = \frac{P_{(H'\cap H)}}{P_{(H)}} = \frac{\dfrac{n_{(H)}n_{(H'|H)}}{n_{(\Omega)}n_{(\Omega')}}}{\dfrac{n_{(H)}}{n_{(\Omega)}}} = \frac{n_{(H'|H)}}{n_{(\Omega')}} \tag{11}$$

次に試行②が試行①のどのような要素に依存するのかを考える．依存する対象としてまず挙げられるのは試行①で成立した役である（役依存性）．例えば試行①で 4C が揃ったとすれば，5 種の数字のうち 1 種が全て使用されてしまっているから試行②で RSF や S は揃わない．この逆も成立し，試行①で RSF または S が揃ったとすれば，5 種の数字全てが 1 枚ずつ使用されてしまっているから試行②で 4C は揃わない．

試行②が依存するのは試行①の役だけではない．例えば試行①で S が揃ったとする．このとき S が使用したスートの種類は 2 種類，3 種類，4 種類のいずれかである（1 種類であれば上位役の RSF となってしまう）．ここで試行②において RSF が成立する場合を考えると，試行①の S が使用したスートが 2 種類であれば全ての数字が未使用のスートが 2 種類残っているから $n_{(\mathrm{RSF}|\mathrm{S})} = 2$ となる．同様に 3 種類の使用なら $n_{(\mathrm{RSF}|\mathrm{S})} = 1$ ，4 種類なら $n_{(\mathrm{RSF}|\mathrm{S})} = 0$ となることが分かる．以上より試行②の確率はスート依存性を有すると理解できる．以降ではある試行の結果がスート

依存性を有するとき，それ以前の試行で成立した役に" $-\lambda\mathrm{s}$ "を付加して使用したスートの種類を明示する（ λ は使用したスートの数）．この記法を用いれば，先の例は $n_{(\mathrm{RSF|S-2s})}=2$ ， $n_{(\mathrm{RSF|S-3s})}=1$ ， $n_{(\mathrm{RSF|S-4s})}=0$ と書ける．

以上より役依存性とスート依存性を考慮して前節と同様の方法で場合の数を求め，(11) 式から試行②における確率を求めた．試行②が依存する役とスートの要因は 15 ある
(" $H'|\mathrm{RSF}$ "," $H'|\mathrm{4C}$ "," $H'|\mathrm{FH-3s}$ ", " $H'|\mathrm{FH-4s}$ "," $H'|\mathrm{S-2s}$ "," $H'|\mathrm{S-3s}$ "," $H'|\mathrm{S-4s}$ ", " $H'|\mathrm{3C-3s}$ "," $H'|\mathrm{3C-4s}$ ", " $H'|\mathrm{2P-2s}$ "," $H'|\mathrm{2P-3s}$ "," $H'|\mathrm{2P-4s}$ ", " $H'|\mathrm{1P-2s}$ ", " $H'|\mathrm{1P-3s}$ "," $H'|\mathrm{1P-4s}$ ")
ことが判明し，それぞれの場合に H' として 7 役が成立しうるから 15×7=105 通りの確率値が得られた．この結果のうち紙面の都合から場合の数を省いて確率値のみを Table2 に示す．

Table1,2 より試行①と依存性によって場合分けされた試行②では成立した役が同一であっても当然ながら成立確率が異なることが理解できるが，ここで重要なのは「成立確率が異なっていても同一の役には確率に関わらず同一の得点を付与する」という同一得点の原則を採用することである．

Table2 試行②における $P_{(h'|H)}$

h'	P(h'|RSF) [%]	P(h'|4C) [%]	P(h'|FH−3s) [%]	P(h'|FH−4s) [%]	P(h'|S−2s) [%]	P(h'|S−3s) [%]	P(h'|S−4s) [%]
RSF	0.0999	0.0000	0.0333	0.0000	0.0666	0.0333	0.0000
4C	0.0000	1.0989	1.0989	1.0989	0.0000	0.0000	0.0000
FH	1.9980	6.5934	5.1948	5.1948	1.9980	1.9980	1.9980
S	7.9920	0.0000	4.2291	4.2624	8.0253	8.0586	8.0919
3C	8.9910	17.5824	16.7832	16.7832	8.9910	8.9910	8.9910
2P	26.9730	39.5604	30.5694	30.5694	26.9730	26.9730	26.9730
1P	53.9461	35.1648	42.0912	42.0912	53.9461	53.9461	53.9461
sum	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000

h'	P(h'|3C−3s) [%]	P(h'|3C−4s) [%]	P(h'|2P−2s) [%]	P(h'|2P−3s) [%]	P(h'|2P−4s) [%]	P(h'|1P−2s) [%]	P(h'|1P−3s) [%]	P(h'|1P−4s) [%]
RSF	0.0333	0.0000	0.0666	0.0333	0.0000	0.0666	0.0333	0.0000
4C	0.7326	0.7326	0.7326	0.7326	0.7326	0.3663	0.3663	0.3663
FH	4.1958	4.1958	3.3966	3.3966	3.3966	2.6307	2.6307	2.6307
S	4.7619	4.7952	6.3270	6.3603	6.3936	7.1262	7.1595	7.1928
3C	14.8518	14.8518	13.4532	13.4532	13.4532	11.2887	11.2887	11.2887
2P	30.2697	30.2697	27.5391	27.5391	27.5391	27.2727	27.2727	27.2727
1P	45.1548	45.1548	48.4848	48.4848	48.4848	51.2488	51.2488	51.2488
sum	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000

４．３　期待値の算出

得点決定（得点関数 $S_{(H)}$ の設計）は期待値に依拠するから，この算出を具体的に述べる．

試行①の期待値は（8）式より得られる．20 枚ゲームの場合を書き下せば（12）式となる．

$$E_{(H)}=S_{(\mathrm{RSF})}P_{(\mathrm{RSF})}+S_{(\mathrm{4C})}P_{(\mathrm{4C})}+S_{(\mathrm{FH})}P_{(\mathrm{FH})}+S_{(\mathrm{S})}P_{(\mathrm{S})}+S_{(\mathrm{3C})}P_{(\mathrm{3C})}+S_{(\mathrm{2P})}P_{(\mathrm{2P})}+S_{(\mathrm{1P})}P_{(\mathrm{1P})} \tag{12}$$

また試行②の期待値は同様に（13）式となる．

$$E_{(H'|h)}=S_{(\mathrm{RSF})}P_{(\mathrm{RSF}|h)}+S_{(\mathrm{4C})}P_{(\mathrm{4C}|h)}+\cdots+S_{(\mathrm{2P})}P_{(\mathrm{2P}|h)}+S_{(\mathrm{1P})}P_{(\mathrm{1P}|h)} \tag{13}$$

ただし h には試行①で成立した役，厳密には役とスートの 15 要因が入る．すなわち試行①の役とスートによって 15 種類の期待値が考えられるのである．この例に（14），(15) 式を挙げる．

$$E_{(H'|4C)} = S_{(RSF)}P_{(RSF|4C)} + S_{(4C)}P_{(4C|4C)} + \cdots + S_{(2P)}P_{(2P|4C)} + S_{(1P)}P_{(1P|4C)} \tag{14}$$

$$E_{(H'|1P-3s)} = S_{(RSF)}P_{(RSF|1P-3s)} + \cdots + S_{(2P)}P_{(2P|1P-3s)} + S_{(1P)}P_{(1P|1P-3s)} \tag{15}$$

（13）式の期待値は試行①で $H = h$ が成立したときに限った期待値であり，これらの値は試行①の確率で出現する（例えば $E_{(H'|4C)}$ は $P_{(4C)}$ という確率で，$E_{(H'|1P-3)}$ は $P_{(1P-3)}$ という確率で現れる）．よって試行②全体としての期待値は「期待値の期待値」として得られ，（16）式のように書ける．

$$E_{(H')} = \sum_{h} P_{(h)}E_{(H'|h)} \tag{16}$$

これを具体的に書き下せば 15 項からなる（17）式に示す多項式となる．

$$\begin{aligned} E_{(H')} = {} & P_{(RSF)}E_{(H'|RSF)} + P_{(4C)}E_{(H'|4C)} + \cdots + P_{(S-2s)}E_{(H'|S-2s)} + P_{(S-3s)}E_{(H'|S-3s)} \\ & + P_{(S-4s)}E_{(H'|S-4s)} + \cdots + P_{(1P-2s)}E_{(H'|1P-2s)} + P_{(1P-3s)}E_{(H'|1P-3s)} + P_{(1P-4s)}E_{(H'|1P-4s)} \end{aligned} \tag{17}$$

以上より（12），（17）式中の得点関数 $S_{(H)}$ 以外の部分，すなわち確率関数 $P_{(H)}$ の値が完全に明らかになれば任意の得点設定によるプレイヤーA,B の期待値が得られ，望ましい期待値の関係を示す得点設定を探すことができる．しかし Table1 に示したように $P_{(S)}$ の値は分かっているものの $P_{(S-2s)}$ ，$P_{(S-3s)}$ ，$P_{(S-4s)}$ のように使用したスートの数ごとの確率は明らかにできていない（S 以外の役でも同様）．ゆえに得点の具体的な設定までには至らなかった．

５．52 枚ゲームの解析

4 章で 20 枚組トランプによるゲームの解析を実施したが，52 枚組では解析の規模が膨大になるのは明らかである．このため 52 枚ゲームでは計算機を利用しての解析を行う予定であり，実際に試行①の確率が求められるプログラムを製作した．プログラムにより得られた 52 枚ゲームにおける確率値は文献[4],[6]に記載されているものと同一となり，したがってプログラムの妥当性が確認できた．

4.2 節で 20 枚ゲームにおける試行②の役依存性とスート依存性を指摘したが，52 枚ゲームでは試行②以降の計算において数字に対する依存性（数字依存性）も考慮する必要がある．この簡単な例として試行①で 4C が揃うことを考える．もし試行①で揃った手札が"♤4-♧4-♢4-♡4-♡2"という組であれば試行②で RSF が揃う場合の数は 4 である．一方"♤4-♧4-♢4-♡4-♡K"という組であれば K が 1 枚使用されているため場合の数は 3 となる．さらに"♤K-♧K-♢K-♡K-♡2"という組であれば全ての K が使用されてしまっているから試行②で RSF は揃わなくなる．

６．結言

本論文ではまずゲームを定義し，ゲームに関する数学的な理論を整理しながら主に 20 枚ゲームを対象として試行①,②の確率を明らかにした．また得点を定めるために必要なプレイヤーA,B の期待値を与える式も示した．しかし明らかにすべき確率を全て求めきれなかったため期待値を具体的に求めるまでには至らず，したがって得点設定の検討はできなかった．

今後の研究で 20 枚ゲームの得点設定の具体的な検討ができれば，次は数字依存性も考慮しなが

ら本来目標としていた 52 枚ゲームの理論を構築しプログラムに落とし込むことで 52 枚ゲームでのあるべき得点設定を検討しようと考えている．この得点設定は両プレイヤーの期待値が同程度になることを目標とする．これが完成すれば，さらに情報理論や統計学の見地から自分の手札から相手の手札や得点を推定したり，ゲーム理論との関係を考察したりする研究へと発展していく可能性を秘めている．

【参考文献】

[1]新井，市川，高遠，野町，向山，村上：新　確率統計，大日本図書株式会社, 2013.

[2]高遠，新井，井川，碓氷，前田，山下：新　基礎数学，大日本図書株式会社, 2011.

[3]任天堂：ポーカー, "https://www.nintendo.co.jp/n09/trump_games/poker/index.html", 2018/02/08 閲覧.

[4]Wikipedia：ポーカー・ハンドの一覧, "https://ja.wikipedia.org/wiki/ポーカー・ハンドの一覧", 2018/02/08 閲覧.

[5]景山，宿久，村上，原：確率と統計の基礎 I [増補改訂版]，株式会社ミネルヴァ書房, 2013.

[6]熊本国府高等学校パソコン同好会：ゲームの確率「トランプ・ポーカー編」, "http://www.kumamotokokufu-h.ed.jp/kokufu/math/game_p.html", 2018/02/08 閲覧.