【実践報告】

ヘロンの公式再考

宇佐美 広介
岐阜大学工学部

要旨

ヘロン（Heron）の公式とは三角形の面積をその 3 辺の長さのみを用いて書き表す公式であり，古来より著名なものである．しかも，その表示式は美しい対称性・構造を持っている．そのような美しさが現れる理由についての私的な考察を与える．その考察結果の口頭発表に対する反響等も報告する．

キーワード：ヘロンの公式，因数定理，同次多項式，逆問題

１．序 ― 美しいヘロンの公式とは

平面幾何学にヘロン（Heron）の公式という著名な定理がある．

これは三角形の3辺の長さからその面積を求める大変綺麗な公式である．△ABC の角 A, 角 B，角 C の対辺の長さを慣例に従いそれぞれ $a,\ b,\ c$ と表せばこの公式は以下のように書ける：

[ヘロンの公式] △ABC の面積 S は

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad \text{ただし，} \quad 2s = a + b + c. \tag{1}$$

上の表示では補助的変数 s が用いられているがこれを用いずに純粋に 3 辺の長さ $a,\ b,\ c$ のみで(1) を書き換えてみると

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}, \tag{1'}$$

となる．この表示では(1)とはまた違った美しさが感じられよう．

筆者は，高校生のときにこの公式を学び，その均整のとれた美しさ・簡明さ・神秘さに心を奪われてしまった．ヘロンの公式はなぜこのように綺麗な数式になっているのであろ

うか？

その後，詩人にして農業技術者でもある宮沢賢治がヘロンの公式に言及した私信を残していることをひょんなことから知った．([3, 4]参照.）内容は，三角形の土地の面積を測量で求めるにはこの公式を用いてみよという知人へのアドバイスである．

通常の（綺麗とは言い難い）三角形の面積公式：底辺×高さ÷2，ではなくヘロンの公式の使用を勧めるというあたりに，賢治のしゃれっ気と，筆者同様この公式の美しさへの礼賛のようなものを感じる．童話を通じて慣れ親しんできたあの賢治と筆者とが，一瞬とはいえ同じ感性を持っていたのかと勝手に解釈をし，筆者はさらにこの公式を愛でるようになった．

さてこの公式の証明であるが，三角法の面積公式

$$S = \frac{1}{2}\ ab\ \sin C = \frac{1}{2}\ ab\sqrt{1-\cos^2 C}$$

と余弦定理 $\cos C = (a^2+b^2-c^2)/(2ab)$ から導くのが標準的である．筆者の学んだ教科書にもそれが記載されていたと記憶する．しかし，当時の筆者にはそのような証明法は(1)の美しさを説明してはいないと思われた．

他にも種々の証明があることをその後知ったが，どれも(1)の美しさを説明してはくれなかった．“この公式の美しさには何か理由があるはずだ・・・どうしたら説明できるのだろうか？”と折に触れ思索を巡らしていたが，筆者は幸い一つの発見法・解釈法を思いついた．次節でそれを紹介したい．これが本稿の主テーマである．

なお,「証明」ではなく「発見・解釈」と称したのは，理論数学的にすぐに正当化できるかどうか分からない発見的手法を用いているからである．とはいえ，このような思考法は数学のみならず科学一般にはよく用いられる考え方である．

２．ヘロンの公式の発見法・解釈法

本節でヘロンの公式の筆者なりの１つの解釈法を与えよう．

実は， △ABC の面積 S が 3 辺の長さのみで表示できるならば,「三角形の面積」が持つべき性質に関する素朴な考察のみで必然的に(1')になってしまうということが説明できる．この考えに至ったときに，初めて筆者はヘロンの公式の美しさの由来が理解できたように感じられた．

以下の議論で用いられる数学の知識は高校数学と大学 1 年生レベルの微積分学がほんの一片である．議論は 4 つの段階に分けておこなう．

(i) △ABC の面積 S は 3 辺の長さ $a,\ b,\ c$ の関数と考えることが出来るので, それを以下では $S(a,\ b,\ c)$ と書くことにしよう．そして $S(a,\ b,\ c)^2$ は $a,\ b,\ c,$ の解析関数と仮定しよう．つまり$(a,\ b,\ c) = (0,0,0)$ の近くで収束する冪級数の形になるということであ

る：

$$S(a,b,c)^2 = \sum_{k,l,m\geq 0}^{\infty} p_{klm} a^k b^l c^m$$

（係数　p_{klm} はある実数.）この右辺のΣ記号（総和記号）は$k,\ l,\ m$ が全ての非負整数全体を動いて成す無限和を表すものである．通常我々が使う初等関数（分数関数，無理関数，三角関数，指数関数，対数関数等を用いて表示される関数たち）はすべて解析関数なので，この仮定は自然なものであろう．

(ii)さて相似図形の性質“図形をλ 倍すると面積は λ^2 になる”を考慮すると$S(\lambda a,\ \lambda b,\ \lambda c) = \lambda^2 S(a,\ b,\ c)$，つまり $S(\lambda a,\ \lambda b,\ \lambda c)^2 = \ \lambda^4 S(a,\ b,\ c)^2$ が任意の $\lambda > 0$ に対して成立するはずである．これは

$$\sum_{k,l,m\geq 0}^{\infty} \lambda^{k+l+m} p_{klm} a^k b^l c^m = \ \lambda^4 \sum_{k,l,m\geq 0}^{\infty} p_{klm} a^k b^l c^m$$

が任意の$\lambda > 0$ に対して成立することを意味する．両辺の λ についての次数を比較して

$$k + l + m \neq 4 \quad \text{ならば} \quad p_{klm} = 0$$

を知る；よって

$$S(a,b,c)^2 = \sum_{k+l+m=4;\ k,l,m\geq 0} p_{klm} a^k b^l c^m$$

である．これより$S(a,\ b,\ c)^2$ は４次の同次多項式と分かる．

(iii) △ABC において極端な場合，つまり$a = b + c$ となってしまい三角形が潰れてしまう場合を考えよう．この場合，当然面積は 0 と考えられる：$S(b + c,\ b,\ c)^2 = 0$. よって，$S(a,\ b,\ c)^2$ をa の多項式と考えて因数定理を用いると，$S(a,\ b,\ c)^2$ は $a - (b + c)$ で割り切れることになる．つまり

$$S(a,\ b,\ c)^2 = \ (b + c - a) \times (\ a,\ b,\ c \text{ の多項式 })$$

と分解できる．同様に考えると$S(a,\ b,\ c)^2$ は $c + a - b,\ \ a + b - c$でも割り切れるので

$$S(a,\ b,\ c)^2 = \ (b + c - a)(c + a - b)(a + b - c)R(a,\ b,\ c)$$

となる．ここにおいて，$R(a,\ b,\ c)$ は $a,\ b,\ c$ のある多項式．なお３つの多項式 $b + c - a,$

$c+a-b,\ \ a+b-c$, が互いに素なこともここに用いている．また，$S(a,\ b,\ c)^2$ は $b+c-a$ では割り切れるが $(b+c-a)^2$ では割り切れないことに注意して欲しい；実際そうなってしまうと，$(c+a-b)^2,\ \ (a+b-c)^2$でも割り切れることとなり，次数に矛盾が生じてしまうからである．

(iv) さて，$S(a,\ b,\ c)^2$ は $a,\ b,\ c$ の多項式としては４次同次式なので$R(a,\ b,\ c)$ は１次同次式；つまり$R(a,\ b,\ c)=pa+qb+rc$（$p,\ q,\ r$ は定数）の形である．さらに図形の対称性により$S(a,\ b,\ c)$ ，つまり $R(a,\ b,\ c)$ は $a,\ b,\ c$ の対称式となるはずなので係数は皆等しいはずである；$p=q=r$ $(=h$ と置こう）：

$$S(a,\ b,\ c)^2=h(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)\ . \tag{2}$$

よって定数 h の値さえ分かれば $S(a,\ b,\ c)^2$ が完全に求まることになる．そのために３辺の長さが 3, 4, 5 の直角三角形を考えよう．これの面積は６ である；すなわち$S(3,\ 4,\ 5)=6$. よって(2)で$a=3,\ b=4,\ c=5$, とおいて $6^2=\ h\cdot 6\cdot 4\cdot 2\cdot 12$ を得る．つまり$h=1/16$ となり

$$S(a,\ b,\ c)^2=\frac{1}{16}(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)$$

が得られてしまう．これはまさに(1')の成立を意味している．

本節の「発見法・解釈法」は明らかに通常の議論方法と異なっていることに読者は気付かれたであろう．“面積 S が３辺の長さ $a,\ b,\ c$ で表示できるとすれば・・・”という前提から考察を始めて，面積 S が持たねばならない性質をどんどん織り込んで行ったら，最終的には「自動的に」S の形が決ってしまうのである．こういう方針による問題解決法を数学・工学では逆問題と呼び，現在も盛んに用いられている解決手法である．

３．実践報告

本稿の内容を口頭発表する機会を何度か得た．その時の状況を最後に報告しておこう．

文献 [1] のワークショップの聴衆は主として会場周辺の大学の数学関係教員・学生らであった．教員らには好評であった．その後，岡山理科大学教員・森義之氏から本稿の内容の関連テーマでの卒業研究を行ったとの報告を受けた．他大学の教員・学生らの研究・教育に本稿の内容が役立ち筆者には望外の喜びであった．

文献 [2] の教員免許更新講習の受講者はもちろん現役の教員らであった．受講に際しての予備知識を予めアナウンスしておいたので，受講者は高校数学教員の方々がほとんどであった．この講習では本稿の内容を含めて種々の題材を扱ったが，終了後のアンケートにより受講者からも本稿の内容が好評であることが確認できた．

本学工学部・応用物理コース 3 年生向けの講義「ダイナミカルシステム」(6 セメスタ開講) の冒頭部で「序論」として本稿の内容を取り上げた．上述のように，数学等における逆問題的思考の丁度よい雛形と思われたので取り上げてみた次第である．この授業のアンケート調査でも数名の学生からのこの話題への好意的印象を知ることが出来た.

以上のように，多くの方々から本稿の内容に関する肯定的意見をいただいたので，今後も機会があれば口頭での発表を行いたいと考えている.

【参考文献】

[1] 宇佐美広介，“Heron の公式は自明か？” 2017 年 3 月 2 日，第 9 回 STM ワークショップーin 岡山　における基調講演，2017 年 3 月 2 日，岡山理科大学.

[2] 宇佐美広介，岐阜大学教員免許状更新講習 2017 年 7 月 1 日.

[3] 翁長兼良，“簡単な農耕地の測量”琉大農家便り(153)，pp4-6, 1968, 琉球大学農家政学部.

[4] 遠山啓，“宮沢賢治とヘロンの公式”数学セミナー1977 年 9 月号，p9，日本評論社.